........................3A-Z

Lineare Algebra I: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2021

Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde! Bitte studieren Sie bis dahin lediglich dieses Deckblatt.

- Bitte halten Sie vor, während und nach der Klausur den vorgeschriebenen Mindestabstand von 1,5 m zu allen anderen Anwesenden ein und tragen Sie eine medizinische Maske. *Während der Klausur* können Sie Ihre Maske an Ihrem Sitzplatz abnehmen.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 6 Aufgaben. Pro Aufgabe sind 10 Punkte zu erwerben.
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telefonjoker etc.) außer mechanischen Armbanduhren und Weckern zugelassen.
- Fragen können Sie nur schriftlich stellen. Geben Sie uns dazu ein Zeichen. Wenn wir Ihre Frage zulassen, werden wir sie laut vorlesen und beantworten.
- Sie dürfen die einzelnen Blätter dieses Bogens trennen. Wir werden sie wieder zusammenheften. Bitte markieren Sie klar, welche Bögen welcher Aufgabe zuzuordnen sind.
- Bitte lassen Sie Ihre Klausur am Ende der Bearbeitungszeit an Ihrem Sitzplatz liegen. Sie können einzelne Klausurbögen mit „bitte nicht werten“ kennzeichnen, aber nicht mitnehmen. Die Klausuraufgaben werden wir veröffentlichen.
- Wenn Sie Ihr Ergebnis im ILIAS-Portal einsehen möchten, bevor es im Studierendenportal sichtbar wird, benötigen Sie eine PIN. Ihre PIN lautet: ....
- Bitte prüfen Sie die folgenden Angaben und korrigieren Sie sie gegebenenfalls:

Name: ....
Matrikelnr.: ....

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							/60

....

Aufgabe 1
Prüfen Sie, ob die folgende Matrix invertierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix!

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2

Gegeben ist das folgende inhomogene reelle lineare Gleichungssystem mit einem Parameter t:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & -5x_2 & + & 3x_3 & & & & & = & -1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 6x_4 & + & t \cdot x_5 & = & 10 \\ 5x_1 & + & x_2 & & & + & 10x_4 & - & 4t \cdot x_5 & = & 7 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & + & 6x_4 & - & 6t \cdot x_5 & = & -2 \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie alle reellen Werte $t \in \mathbb{R}$, für die das gegebene inhomogene System mindestens eine reelle Lösung besitzt.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems.

(c) Geben Sie in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum des gegebenen inhomogenen Gleichungssystems an.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3

Der Endomorphismus $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch Multiplikation mit der folgenden Matrix gegeben:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_F(t)$, und bestimmen Sie alle Nullstellen von χ_F.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von F.

(c) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert von F einen Eigenvektor.

(d) Ist der Endomorphismus F diagonalisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort!

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4

Kreuzen Sie in den folgenden acht Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

(1) Seien A, B Mengen. Eine **Abbildung** $f\colon A \to B$ ist eine Vorschrift, die

☐ jedem $a \in A$ genau ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.

☐ jedem $a \in A$ mindestens ein Element $f(a) \in B$ zuordnet.

☐ jedem $b \in B$ ein Element $a \in A$ mit $f(a) = b$ zuordnet.

(2) Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X ist **transitiv**, wenn für alle $x, y, z \in X$ gilt:

☐ $(x \sim y \text{ und } y \sim x) \Rightarrow x = y$

☐ $(x_1 \sim y_1 \text{ und } x_2 \sim y_2) \Rightarrow x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$

☐ $(x \sim y \text{ und } y \sim z) \Rightarrow x \sim z$

(3) Die folgenden Abbildungen sind **wohldefiniert**:

☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ [n] &\mapsto (-1)^n \end{aligned}$ ☐ $\begin{aligned} \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) &\to \mathbb{Q} \\ (a, b) &\mapsto \frac{a}{b} \end{aligned}$

(4) Eine Abbildung $f\colon A \to B$ zwischen den Mengen A und B nennen wir **bijektiv**, wenn gilt:

☐ Zu jedem $b \in B$ existiert genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.

☐ Zu jedem $a \in A$ existiert genau ein $b \in B$ mit $f(a) = b$.

☐ Die Mengen A und B haben genau gleich viele Elemente.

(5) Seien X, Y, Z Mengen. Für die Komposition $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ der Abbildungen $X \xrightarrow{g} Y$ und $Y \xrightarrow{f} Z$ gilt:

☐ Sind g und f injektiv, so ist auch $f \circ g$ injektiv.

☐ Ist g injektiv und f surjektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv.

☐ Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g injektiv.

(6) Bekanntlich ist eine Gruppe $(G, *)$ **abelsch**, wenn die Verknüpfung $*$ kommutativ ist. Die folgenden Gruppen sind abelsch:

☐ $(\mathbb{Z}, +)$

☐ $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

☐ $(\mathbb{S}_3, \circ)$ (symmetrische Gruppe die dreistelligen Permutationen)

(7) Die folgenden Ringe sind Körper:

☐ $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

☐ $\mathbb{R}[t]$ (Polynomring über $\mathbb{R}$ mit üblicher Addition und Multiplikation von Polynomen)

☐ $\mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ (Ring der reellen 2×2-Matrizen)

(8) Für jeden **Körper** K gilt:

☐ Es gibt unendlich viele verschiedene Elemente in K.

☐ Zu jedem $\alpha \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\alpha \cdot \beta = 1$.

☐ Zu jedem $\alpha \in K$ existiert ein $\beta \in K$ mit $\beta^2 = \alpha$.

Aufgabe 5
Im Folgenden sei K ein Körper. Kreuzen Sie in den sieben Aufgabenteilen alle Aussagen an, die richtig sind.

Es ist pro Aufgabenteil mindestens eine *Aussage richtig. Manchmal sind* mehrere *Aussagen richtig. Als Gesamtpunktzahl erhalten Sie die Differenz aus der Anzahl aller richtig gesetzten Kreuze und aller falsch gesetzten Kreuze, mindestens aber 0 Punkte und höchstens 10 Punkte.*

---

(1) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. (Konvention: $0 \in \mathbb{N}$)
- ☐ Wir können die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ auffassen als Vektorraum über $\mathbb{Z}$.
- ☐ Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ auffassen als Vektorraum über den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.

(2) Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ in einem Vektorraum sind genau dann **linear unabhängig**, wenn gilt:

- ☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$.
- ☐ Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ folgt aus $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ bereits $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$.
- ☐ $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ und es gibt kein $\alpha \in K$ mit $\mathbf{v}_1 = \alpha \cdot \mathbf{v}_2$.

(3) Der Nullvektorraum $\{\mathbf{0}\}$ über $\mathbb{R}$

- ☐ besitzt keine Basis.
- ☐ besitzt als Basis die leere Familie.
- ☐ besitzt als Basis die Familie, die nur aus dem Nullvektor $\mathbf{0}$ besteht.

(4) Sei V ein Vektorraum über K. Eine Familie von Vektoren $\mathcal{B} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ aus V bildet genau dann eine **Basis** von V, wenn gilt:

- ☐ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V und $\dim(V) = 3$.
- ☐ Zu jedem Vektor $\mathbf{v} \in V$ existiert genau ein Tripel $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in K^3$, sodass gilt: $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3$.
- ☐ $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem von V, und $\mathbf{v}_i \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(5) Die folgenden Matrizen $A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$ sind invertierbar:
Achtung: Koeffizienten in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

(6) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; K)$ ist genau dann invertierbar, wenn gilt:

- ☐ $\mathrm{rang}(A) = n$.
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ☐ Die Zeilen von A sind linear unabhängig.

(7) Eine quadratische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{R})$ vom Rang $\mathrm{rang}(A) < n$

- ☐ besitzt 0 als Eigenwert.
- ☐ besitzt keine Eigenwerte.
- ☐ besitzt höchstens $n - 1$ verschiedene Eigenwerte.

Aufgabe 6
Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines Vektorraums V, so schreiben wir f^i für die i-fache Verkettung von f mit sich selbst, also $f^0 = \mathrm{id}$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ usw.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$. Geben Sie ein Beispiel für einen Endomorphismus f von $\mathbb{R}^2$ an, für den gilt: $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$ und $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

(b) Beweisen Sie: Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines beliebigen Vektorraums V mit $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f)$, so ist $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f)$ für alle natürlichen Zahlen $i \geqslant 1$.

(c) Beweisen Sie: Ist $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus eines *n-dimensionalen* Vektorraums V, und ist f^i für irgendeine natürliche Zahl i die Nullabbildung, so ist f^{n+1} die Nullabbildung.

Sie können jeden Satz der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form (d. h. unabhängig von der vorliegenden Aufgabenstellung) wiedergeben.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: